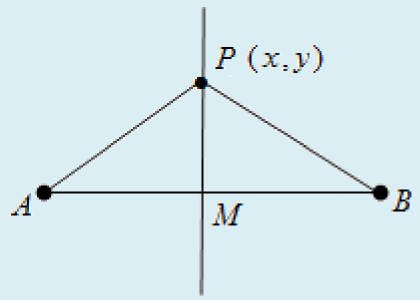
O produto escalar na definição de lugares geométricos

No plano

Mediatriz de um segmento de reta [AB]

Sendo M o ponto médio de $[AB]$, a **mediatriz de** $[AB]$ é o lugar geométrico dos pontos P do plano que verificam a condição:

$$\boxed{\vec{MP} . \vec{AB} = 0}$$



Exemplo: Determinar uma equação da mediatriz do segmento de reta $[AB]$, sendo $A(-1,0)$ e $B(1,2)$.

Resolução:

- Cálculo de M, ponto médio de $[AB]$:

$$M = \left(\frac{-1+1}{2} , \frac{0+2}{2} \right) = (0,1)$$

- Cálculo de $\vec{AB}$ e $\vec{MP}$:

$$\vec{AB} = B - A = (1,2) - (-1,0) = (2,2)$$

$$\vec{MP} = P - M = (x,y) - (0,1) = (x, y-1)$$

- Condição que define a mediatriz

$$\begin{aligned} \vec{MP} . \vec{AB} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x, y-1)\cdot(2,2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x + 2y - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x + y - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x + y = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad y = -x + 1 \end{aligned}$$

Exercícios Propostos:

1. Aplicando o produto escalar, determina uma equação da mediatriz de $[AB]$, sendo:

a) $A(1,1)$ e $B(-1,3)$

b) $A(1,0)$ e $B(-3,2)$

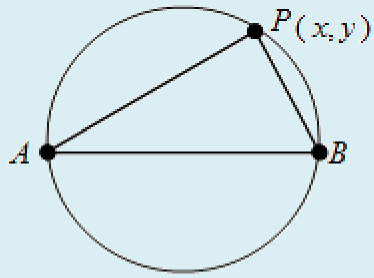
c) $A(0,1)$ e $B(2,1)$

No plano

<u>Equação de uma circunferência em que [AB] é o seu diâmetro</u>

A circunferência de diâmetro $[AB]$ é o lugar geométrico dos pontos P do plano que verificam a condição:

$$\boxed{\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}=0}$$



Exemplo: Determina uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$**,** sendo $A(1,0)$ e $B(0,1)$.

Resolução:

- Cálculo de $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BP}$:

$\overrightarrow{AP}=P-A=(x,y)-(1,0)=(x-1,y)$

$\overrightarrow{BP}=P-B=(x,y)-(0,1)=(x,y-1)$

- Condição que define a circunferência

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=0 &\Leftrightarrow (x-1,y)\cdot(x,y-1)=0\\ &\Leftrightarrow x(x-1)+y(y-1)=0\\ &\Leftrightarrow x^2-x+y^2-y=0\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-x-y=0\end{aligned}$$

<u>Exercícios Propostos</u>:

2. Determina uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$**,** sendo

a) $A(0,0)$ e $B(-1,0)$

b) $A(0,1)$ e $B(1,0)$

c) $A(-1,0)$ e $B(2,1)$

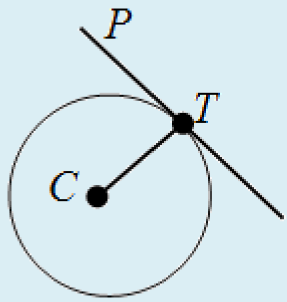
3. Determina ***m*** de modo que os vetores sejam perpendiculares:

a) $\vec{u}=(2,-3)$ e $\vec{v}=(m,-1)$

b) $\vec{u}=(1,2)$ e $\vec{v}=(3,m)$

c) $\vec{u}=(2m,1)$ e $\vec{v}=(1,-2)$

No plano



Reta tangente a uma circunferência, num dado ponto

Reta tangente à circunferência de centro C, no ponto T, é o lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem a condição

$$\boxed{\overrightarrow{TP}.\overrightarrow{TC}=0}$$

Exemplo: Determinar uma equação da reta tangente à circunferência de equação $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ no ponto $T(0,0)$.

Resolução:

- Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da circunferência e $C(1,-1)$ o centro da circunferência.:
- Cálculo de $\overrightarrow{TP}$ e $\overrightarrow{TC}$:

  $\overrightarrow{TP}=P-T=(x,y)-(0,0)=(x,y)$

  $\overrightarrow{TC}=C-T=(1,-1)$
- Condição que define a reta:

  $\overrightarrow{TP}.\overrightarrow{TC}=0 \Leftrightarrow (x,y)\cdot(1,-1)=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow y=x$

Logo, $y=x$ é uma equação da reta tangente à circunferência no ponto $T(0,0)$.

<u>Exercícios Propostos:</u>

4. Num referencial o.n. do plano, considera os pontos $A(2,1)$, $B(-3,4)$ e $C(0,-2)$.

a) Escreve uma equação da mediatriz de $[AC]$.

b) Determina uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$.

c) Determina uma equação da reta tangente à circunferência centrada em B, no ponto A.

5. Determina uma equação da reta tangente à circunferência de equação $x^2+y^2=5$, no ponto $A(-1,2)$

6. Determina uma equação da reta tangente à circunferência de equação $(x+1)^2+y^2=8$, no ponto $B(-3,2)$

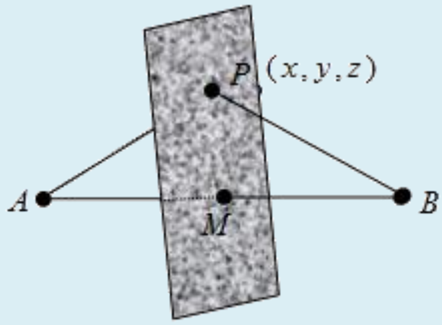
7. Determina uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$ sendo $A(-1,1)$ e $B(1,3)$.

No espaço

Plano mediador de um segmento de reta [AB]

Sendo M o ponto médio de $[AB]$, o **plano mediador de** $[AB]$ é o lugar geométrico dos pontos P do espaço que verificam a condição:

$$\boxed{\overrightarrow{MP}.\ \overrightarrow{AB}=0}$$



Exemplo: Determina uma equação do plano mediador do segmento de reta $[AB]$, sendo $A(-1,0,2)$ e $B(1,2,-2)$.

Resolução:

- Cálculo de M, ponto médio de $[AB]$:

$$M=\left(\frac{-1+1}{2}\ ,\ \frac{0+2}{2}\ ,\ \frac{2+(-2)}{2}\right)=(0,1,0)$$

- Cálculo de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{MP}$:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(1,2,-2)-(-1,0,2)=(2,2,-4)$$

$$\overrightarrow{MP}=P-M=(x,y,z)-(0,1,0)=(x,y-1,z)$$

- Condição que define a mediatriz

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP}.\ \overrightarrow{AB}=0 \ &\Leftrightarrow\ (x,y-1,z)\cdot(2,2,-4)=0\\ &\Leftrightarrow\ 2x+2y-2-4z=0\\ &\Leftrightarrow\ 2x+2y-4z=2\\ &\Leftrightarrow\ x+y-2z=1\end{aligned}$$

Exercícios Propostos:

8. Aplicando o produto escalar, determina uma equação do plano mediador de $[AB]$, sendo:

a) $A(1,1,1)$ e $B(-1,3,1)$

b) $A(1,0,2)$ e $B(-3,2,-1)$

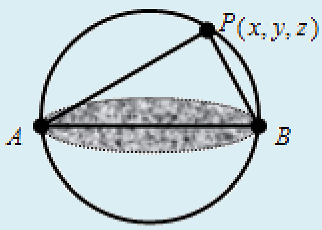
c) $A(0,1,0)$ e $B(2,1,-2)$

No espaço

Equação de uma superfície esférica em que [AB] é o seu diâmetro

A superfície esférica de diâmetro $[AB]$ é o lugar geométrico dos pontos P do espaço que verificam a condição:

$$\boxed{\overrightarrow{PA}.\ \overrightarrow{PB}=0}$$



Exemplo: Determina uma equação da superfície esférica de diâmetro $[AB]$**,** sendo $A(1,0,1)$ e $B(0,1,0)$

Resolução:

- Cálculo de $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BP}$:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y, z) - (1,0,1) = (x-1, y, z-1)$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (x, y, z) - (0,1,0) = (x, y-1, z)$$

- Condição que define a superfície esférica

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP} = 0 &\Leftrightarrow (x-1, y, z-1)\cdot(x, y-1, z) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - y + z^2 - z = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0 \end{aligned}$$

Exercícios Propostos:

9. Determina uma equação da superfície esférica de diâmetro $[AB]$**,** sendo

a) $A(0,0,0)$ e $B(-1,0,1)$

b) $A(0,1,1)$ e $B(1,0,1)$

c) $A(-1,0,-1)$ e $B(2,1,2)$

10. Determina ***m*** de modo que os vetores sejam perpendiculares:

a) $\vec{u} = (2, -3, -2)$ e $\vec{v} = (m, -1, 2)$

b) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (3, m, 1)$

c) $\vec{u} = (2m, 1, 3)$ e $\vec{v} = (1, -2, 1)$

11. No espaço, o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos pontos $A(1,0,0)$ e $B(0,-1,0)$ é:

(A) o plano de equação $x = -y$ **(B)** o plano de equação $x = -z$

(C) o ponto de coordenadas $(1, -1, 0)$ **(D)** o plano de equação $y = -z$

12. Num referencial Oxyz no espaço, o conjunto de pontos definido pela condição: $x = -1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 2$ é:

(A) um rectângulo **(B)** um paralelepípedo

(C) um segmento de reta **(D)** um ponto

13. Num referencial Oxyz no espaço , o simétrico do ponto P (3, 4, - 5) relativamente ao eixo Oz é :

(A) $(3, 4, 5)$ **(B)** $(-3, -4, -5)$ **(B)** $(-3, -4, 5)$ **(B)** $(3, -4, -5)$

14. Num referencial Oxyz no espaço, o plano perpendicular ao eixo Oy que passa pelo ponto $P(-1, 2, 3)$ é definido pela condição:

(A) $y=2 \wedge z=3$ **(B)** $z=3$ **(B)** $y=2$ **(B)** $x=-1$

15. O centro e o raio da esfera definida pela condição $(x+3)^2+(y-1)^2+z^2 \leq 8$ são:

(A) $C(3, 1, 0)$ e $r=8$ **(B)** $C(-3, 1, 0)$ e $r=8$

(C) $C(3, 1, 0)$ e $r=\sqrt{8}$ **(D)** $C(-3, 1, 0)$ e $r=2\sqrt{2}$

16. A equação $y=2$ representa:

(A) um ponto no plano e uma reta no espaço; **(B)** uma reta quer no plano quer no espaço;

(C) um ponto quer no plano quer no espaço; **(D)** uma reta no plano e um plano no espaço.

17. A reta que contém o ponto $A(2, 3, 1)$ e é paralela ao eixo das cotas tem de equação:

(A) $x=2 \wedge y=3$ **(B)** $y=3 \wedge z=1$

(C) $x=2 \wedge z=1$ **(D)** $x=3 \wedge y=2$

18. No espaço, a condição $y=-2 \wedge z=-3 \wedge 0 \leq x \leq 5$ representa geometricamente:

(A) um plano; **(B)** uma reta;

(C) um segmento de reta; **(D)** um círculo.

19. No espaço, a condição $x=2 \wedge z=-3$ representa geometricamente:

(A) um plano paralelo a xOz; **(B)** uma reta paralela ao eixo das cotas;

(C) uma reta paralela ao eixo das coordenadas; **(D)** um plano perpendicular ao eixo das coordenadas.

20. O simétrico do ponto $A(2,-1,-3)$ em relação ao plano xOz é:

(A) $(-2,-1,-3)$ **(B)** $(-2,-1,3)$

(C) $(2,1,-3)$ **(D)** $(2,-1,-3)$

21. A condição $x=2 \wedge y=3$ representa:

(A) um ponto no plano e uma reta no espaço; **(B)** uma reta quer no plano quer no espaço;

(C) um ponto quer no plano quer no espaço; **(D)** uma reta no plano e um plano no espaço.

22. No espaço, a condição $y=0 \wedge z=0$ define :

(A) o plano yOz; **(B)** o eixo Ox; **(B)** o eixo Oy; **(B)** o eixo Oz.

23. O ponto de coordenadas $(2, k, -1))$ pertence ao plano de equação $x-2y+z=-1$ quando:

(A) $k=-1$ **(B)** $k=1$

(C) $k=-2$ **(D)** $k=2$

Ficha Formativa: Exercícios

1ª Parte: Questões Múltiplas

1. O valor que k deve tomar para que o vetor $\vec{u}=(k+1\ ,\ 2k)\ ,k\in\mathbb{R}$, seja paralelo à bissectriz dos quadrantes pares é:

(A) -1 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(B)** $-\frac{1}{3}$ **(B)** $-\frac{1}{2}$

2. Num referencial o.n. Oxy, A e B são dois pontos distintos. O lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ é:

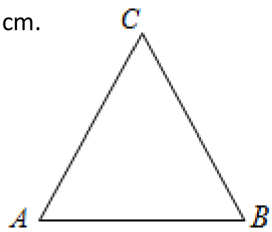
(A) a reta tangente à circunferência no ponto A;
(B) a mediatriz do segmento de reta $[AB]$;
(C) a circunferência de diâmetro $[AB]$;
(D) nenhuma das anteriores.

3. Acerca de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabe-se que $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=3$ e $\vec{u}\,.\,\vec{v}=9$

Então podemos afirmar que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são:

(A) perpendiculares;
(B) não colineares ;
(C) colineares do mesmo sentido;
(D) colineares de sentidos contrários.

4. Na figura está representado um triângulo equilátero de perímetro 12 cm.



O valor do produto escalar $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ é:

(A) 4 **(B)** 8
(C) 16 **(D)** -8

5. Uma equação cartesiana da mediatriz do segmento de reta $[AB]$, sendo $A(1,3)$ e $B(3,1)$ é:

(A) $y=-x$ **(B)** $y=x$ **(B)** $y=-x+1$ **(B)** $y=x-1$

2ª Parte: Questões de Desenvolvimento

1. Considera num referencial o.n. os pontos $A(-3,2)$, $B(1,3)$ e $C(1,-2)$.

1.1. Determina uma equação da reta que contém o ponto B e é perpendicular à reta AC.

1.2. Escreve uma equação da reta tangente em A à circunferência de centro C.

1.3. Escreve uma equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

1.4. Escreve uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$.

2. Sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores do plano tais que:

$$\left\|\vec{a}\right\| = 2 \;;\quad \left\|\vec{b}\right\| = 3 \quad \text{e} \quad \vec{a}\,.\,\vec{b} = -5 \quad .$$

Determina:

2.1. $4\vec{a}\,.\,(\vec{b} - 2\vec{a})$;

2.2. O valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que: $\left(k\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = 5$

3. Considera num referencial o.n. os pontos $A(-3,1)$ e $B(1,2)$, o vetor $\vec{u} = (1\,,-2)$ e a reta r de equação $2x + 3y = 1$.

3.1. Determina a equação reduzida da reta que passa em A e é perpendicular ao vetor $\vec{u}$.

3.2. Determina com aproximação às centésimas de grau, o ângulo formado pelas retas AB e r.

3.3. Determina a inclinação da reta r.

3.4. Determina uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$.

3.5. Determina as coordenadas de um ponto C, pertencente ao eixo dos xx, de modo que o triângulo [ABC] seja retângulo em B.

SOLUÇÕES: